Plokštumos tiesės

**1 pavyzdys.** Tiesėje d1 : x = -7 + 3t, y = 2 + t rasime taškus, nutolusius nuo tiesės d2 : x + 2y + 3 = 0 atstumu .

**Sprendimas**. Sakykime, kad taškas M0 (x0, y0) tenkina uždavinio sąlygas. Tada M0 ∈ d1, ρ (M0, d2) = ,

t.y.

x0 = -7 + 3t, y0 = 2 + t, , ( (žiūrėti į d2))

arba

x0 - 3y0 + 13 = 0, x0 + 2y0 + 3 = 5.

Išsprendę šią lygčių sistemą, gausime, kad tokie taškai yra du, t.y. M0 (-4, 3) ir

M1 (-10, 1).

**Atsakymas**: M0 (-4, 3) , M1 (-10, 1).

**2 pavyzdys.** Parašysime lygtį tiesės d, einančios per tiesių d1 : x = 2t, y = -1 + t ir d2 : x - y + 5 = 0 susikirtimo tašką ir sudarančios 45° kampą su tiese d3 : 2x + y - 11 = 0.

**Sprendimas**. Spręsdami sistemą randame tiesių d1 ir d2 sankirtos tašką Sakykime, kad d lygtis yra Kadangi tai Kadangi kampas tarp tiesių d ir d3  yra 45°, tai pagal kampo tarp tiesių formulę, gauname

Šios lygties abi puses pakėlę kvadratu, gausime, kad Pertvarkome šią lygtį: Pastebėkime, kad (priešingu atveju iš šios lygybės gautume, kad o to būti negali) Padaliję šios lygties abi puses iš ir pažymėję , gauname kvadratinę lygtį kurią išsprendę randame Iš čia arba Kadangi tiesės lygtyje koeficientai nustatomi nevienareikšmiškai (lygtį galima dauginti iš bet kokio nelygaus nuliui skaičiaus), tai galime vienu atveju imti o kitu atveju Tuomet pirmuoju atveju o antruoju

Atsakymas:

**3 pavyzdys**. Parašysime trikampio ABC kraštinių lygtis, žinant viršūnę A (3, -4) ir dviejų jo vidaus kampų pusiaukampinių lygtis d1: x - y - 2 = 0, d2: x - 3y - 8 = 0.

**Sprendimas.** Kadangi tiesės d1 ird2 yra pusiaukampinės, tai taškas A1, simetriškas taškui A tiesės d2 atžvilgiu ir taškas A2, simetriškas taškui A tiesės d1 atžvilgiu, yra tiesėje BC

Lygtis statmens d3, nuleisto iš taško A į tiesę d2, yra 3(x - 3) + 1(y + 4) = 0.Tiesės d2 ir d3 kertasi taške P, kurio koordinatės yra lygčių sistemos



sprendinys. Išsprendę šią sistemą, randame taško P koordinates P . Kita vertus, taškas P yra atkarpos AA1 vidurio taškas 

Iš čia gausime taško A1 koordinates A1 .

Analogiškai, atlikę skaičiavimus, , gausime tašką A2 (-2, 1)

ir tiesės (BC) lygtį



arba 55x + 30y - 316 = 0. Tiesės d1 ir (BC) kertasi taške B, o tiesės d2 ir (BC) kertasi taške C. Taškų B ir C koordinates rasime, išsprendę lygčių sistemas

 ir 

 ir 

Iš čia, .

Tuomet užrašome tiesių ( AB ) ir ( AC ) lygtis :

(AB) :  (AC) : 

**Atsakymas.**  (BC) :  (AB) : 

(AC) : 

**4 pavyzdys**. Parašysime trikampio ABC kraštinių lygtis, žinant viršūnę B (2, 3), pusiaukampinę (CL) : x - y = 0 ir pusiaukraštinę (CM) : x + 2y - 3 = 0.

**Sprendimas.**Tiesės (CM) ir (CL) kertasis taške C (34 pav.), kurio koordinatės yra lygčių sistemos

.

sprendinys. Iš čia gauname taško C koordinates C(1, 1). Tada tiesės (CB) lygtis yra

(CB) : ,

arba (CB) :2x - y - 1 = 0.

Tiesė (CA) eina per tašką C, tai jos lygtis yra :

(CA): A(x - 1) + B(y - 1) = 0

Iš sąlygos ∠LCA = ∠BCL išplaukia lygybė

,

t.y.

2A2 + 2B2 + 5AB = 0.

Šios lygties sprendiniai yra

 ir .

Pirmasis sprendinys netinka, nes jį įstatę į tiesės CA lygtį, gausime tiesę CB. Įstatę antrąjį sprendinį, gausime

(CA) : x - 2y + 1 = 0.

Kadangi taškas M yra atkarpos AB vidurys, tai

.

Kita vertus, taškas M yra tiesėje ( CM ), o taškas A yra tiesėje ( CA ). Todėl teisingos tokios lygybės

xM + 2yM  - 3 = 0, xA - 2yA  + 1 = 0.

Iš čia gausime taško A koordinates ,

ir tiesės AB lygtį AB : 

arba

AB : 13x - 14y + 16 = 0.

**Atsakymas.** CB : 2x - y - 1 = 0, CA : x - 2y + 1 = 0, AB : 13x - 14y + 16 = 0.

**5 pavyzdys.** Parašysime trikampio ABC vidinio kampo C pusiaukampinės lygtį, jei

A (1, 1), B (8, 5), C (4, 5).

**Sprendimas.** Kadangi tiesė CL - pusiaukampinė tai ji eina per tašką C ir lygiagreti vektoriui pusiaukampinės krypties vektorius

**a** = ,

čia b = ⎢**CA** ⎢, a = ⎢**CB** ⎢.

Taigi,

**a** =  = ,

ir tiesės CL lygtis bus tokia

CL : ,

arba

CL : 2x + y - 13 = 0.

Kitas būdas: CD – pusiaukampinė, tai

**Atsakymas.** 2x + y - 13 = 0.

**6 pavyzdys.** Kvadrato simetrijos centras M(1, 2), o vienos kraštinės lygtis x + y - 1=0. Parašysime kitų kvadrato kraštinių lygtis.

**Sprendimas.** Sakykime, kad kraštinės AB lygtis x + y - 1 = 0 . Atstumas nuo taško M iki tiesės AB yra . Tiesė DC lygiagreti tiesei AB, tai jos lygtis yra x + y + C = 0. Ji nutolusi nuo taško M atstumu . Todėl

.

Iš čia  = 2, t.y. C1 = -1, C1 = -5.

Vadinasi tiesės DC lygtis yra x + y - 5 = 0 ( kai C1 = -1 gavome tiesės AB lygtį).

Tiesė AD statmena tiesei AB, todėl jos lygtis yra x - y + C = 0.

Kadangi ,

tai = 2, ir iš čia C1 = 3, C2 = -1.

Vadinasi, AD : x - y - 1 = 0, BC : x - y + 3 = 0.

Patikrinimas:

**Atsakymas.** x + y - 5 = 0, x - y + 3 = 0, x - y - 1 = 0.

**7 pavyzdys.** Parašysime lygiagretainio kraštinių lygtis, žinant jo centrą M (1, 1) ir po vieną tašką tiesėse, kuriose yra kiekviena kraštinė M1 (2, 3), M2 (4, 5), M3 (1, 2), M4 (-1, 2).

**Sprendimas.** Pastebėkime, kad taškas M1\*, simetriškas taškui M1 taško M atžvilgiu, yra kraštinėje DC , todėl kraštinė DC yra tiesėje, einančioje per taškus M3 ir M1\*. Kadangi

,

tai gausime M1\*(0, -1). Tuomet tiesės DC lygtis bus tokia

DC : 

arba

3x - y - 1 = 0.

Tiesė AB lygiagreti tesei DC ir eina per tašką M1, jos lygtis

AB : 3(x -2) - 1(y - 3) = 0

arba

3x - y - 3 = 0.

Analogiškai surandame tašką M2\*(-2, -3) ir tiesės AD lygtį per M2\* ir per M4 (-1, 2).

AD : ,

arba

x - y - 1 = 0,

o taip pat tiesės BC lygtį

BC : 1(x -4) - 1(y - 5) = 0,

arba

x - y + 1 = 0.

**Atsakymas.** 3x - y - 1 = 0, 3x - y - 3 = 0, x - y - 1 = 0, x - y + 1 = 0.

**8 pavyzdys**. Parašykite lygiagretainio kraštinių lygtis, žinant jo įstrižainių susikirtimo tašką M ( 3, -1 ) ir dviejų kraštinių lygtis x - y -1 = 0, x - 2y = 0.

**Sprendimas**. Kadangi duotosios tiesės nėra lygiagrečios , tai o jų sankirta yra lygiagretainio viršūnė Iš čia Kadangi lygiagretainio įstrižainių sankirtos taškas yra įstrižainių vidurio taškas, tai taško koordinatėms yra teisingos lygybės , taigi Taigi tiesės ir yra tiesės, kurios eina per tašką ir lygiagrečios atitinkamai su tiesėmis ir taigi

**Atsakymas.**

**9 pavyzdys**. Raskite tašką, nutolusį nuo tiesių a: 4x - 3y + 20 = 0 ir b: 3x + 4y - 60 = 0 atstumu 5.

**Sprendimas.** Tarkime, kad – ieškomasis taškas. Iš sąlygų pagal atstumo nuo taško iki tiesės formulę turime lygybes . Pertvarkę turime lygybes Iš čia gauname keturias sistemas:

Išsprendę šias sistemas gauname keturis ieškomuosius taškus

**Atsakyma**s:

**10 pavyzdys**. Parašykite trikampio kraštinių lygtis, žinant viršūnę B (2, -1), aukštinės ir pusiaukampinės, išvestų iš skirtingų viršūnių lygtis 3x - 4y + 27= 0, x + 2y - 5= 0.

**Sprendimas**. Įrašę taško koordinates į duotąsias lygtis, įsitikiname, kad jos nėra teisingos: Taigi nei duotoji aukštinė, nei duotoji pusiaukraštinė neina per tašką Todėl sakykime, kad aukštinė o pusiaukraštinė Kadangi kraštinė eina per tašką ir statmena aukštinei tai šios tiesės lygtis taigi

Surasime tašką kuris yra tiesių ir sankirtos taškas: Iš šios sistemos randame

Sakykime, kad yra kraštinės vidurio taškas, o taškas tuomet t. y. Kadangi taškas yra tiesėje tai teisinga lygybė Kadangi taškas yra tiesėje tai teisinga lygybė Iš sistemos randame Tuomet t. y. o t. y.

**Atsakymas**:

**11 pavyzdys**. Parašykite kvadrato ABCD kraštinių lygtis, jei A ( 2, 0 ), B ( -1, 4 ).

**Sprendimas.** Parašykime tiesės lygtį: todėl Tiesė yra statmena tiesei ir eina per tašką taigi jos lygtis t. y. Analogiškai tiesė yra irgi statmena tiesei ir eina per tašką todėl jos lygtis t. y., Tiesė yra lygiagreti su tiese todėl jos lygtis Koeficientą rasime iš sąlygos, kad atstumas tarp lygiagrečių tiesių ir yra lygus kvadrato kraštinės ilgiui: Pagal atstumo tarp lygiagrečių tiesių formulę turime lygybę Iš čia gauname dvi reikšmes: Todėl gauname dvi tiesių lygtis:

**Atsakymas**: : arba :

**12 pavyzdys**. Raskite tašką, simetrišką taškui M ( -2, 9 ) atžvilgiu tiesės, einančios per taškus P ( 0, 6 ), Q ( -6, 2 ).

**Sprendimas.** Parašysime tiesės lygtį: t. y. Tiesėseinančios per tašką ir statmenos tiesei lygtis yra t. y. Rasime tašką kuriame kertasi tiesės ir Tuo tikslu sprendžiame sistemą iš jos randame Kadangi taškas , simetriškas taškui tiesės yra toks, kad taškas yra atkarpos vidurio taškas, tai todėl

**Atsakymas**: (2, 3).

Savarankiškam darbui:

1. Parašykite trikampio kraštinių lygtis, jei žinomos dvi viršūnės ir aukštinių sankirtos taškas: A ( 3, -1 ), B ( 5, 7 ), H ( 4, -1 ).
2. Kvadrato įstrižainės lygtis 7x - y + 8= 0, o viršūnė A ( -4, 5 ). Parašykite kvadrato kraštinių ir kitos įstrižainės lygtis.
3. Parašykite stačiakampio kraštinių lygtis, žinant dviejų jo įstrižainių lygtis 7x - y + 4 = 0,

x + y - 2 = 0 ir tašką M ( 3, 5 ), esantį vienoje kraštinėje.

1. Tiesėje x - 3y + 13 = 0 raskite taškus, nutolusius nuo tiesės x + 2y + 3 = 0 atstumu 